

ANÁLISIS NUMÉRICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Super Manual de Apuntes, Demostraciones y Guía de Exámenes — Parcial I (P1)

Documento maestro exhaustivo y autosuficiente para dominar el 100% del temario del Primer Parcial. Diseñado para entender cada concepto intuitivamente, memorizar cada demostración rigurosamente y asegurar la máxima calificación tanto en Teoría (5 pts) como en Práctica MATLAB (5 pts).

Teoría Completa al Detalle

Desde los problemas continuos de Cauchy y Contorno hasta esquemas avanzados, sin saltar ni un solo paso algebraico.

Todas las Demostraciones de Examen

Gronwall continuo y discreto, Lax, TFI, Newton, leyes de energía (Taylor centrado, Convex Splitting, Secante) y Principios del Máximo.

Exámenes Reales Resueltos

Convocatorias 2024/25 y 2025/26 resueltas paso a paso con los trucos clave identificados en el correo de la asignatura.

Laboratorio Práctico MATLAB

Plantillas de código para Newton, cálculo del orden de convergencia experimental (EOC) y resolución matricial de contorno.

Material elaborado para el seguimiento integral de ANED (P1)

Basado en el programa oficial del Prof. F. Guillén-González y registros de exámenes oficiales de la US.

0. Estrategia Maestra de Examen y Claves del P1

CLAVE DE ORO DEL EXAMEN

Estructura de la Evaluación y Repetición de Patrones

El examen del Primer Parcial consta de dos bloques equiponderados: **Teoría (5 puntos)** y **Práctica en MATLAB (5 puntos)**. El análisis de las convocatorias oficiales y las orientaciones del profesorado confirman que los exámenes repiten siempre 4 familias de ejercicios:

- **1. Existencia y Unicidad Local de Esquemas Implícitos:** Se resuelve *siempre* mediante el Teorema de la Función Implícita (TFI) en 3 pasos universales.
- **2. Método de Newton y Condiciones de Convergencia:** Expresión iterativa, Jacobiano regular y acotación de h_n vía radio espectral ρ o signo de la derivada.
- **3. Error de Consistencia y Orden:** Desarrollo de Taylor en potencias de h_n para anular los coeficientes $a_0, a_1, \dots$ o desarrollo centrado.
- **4. Leyes de Energía Discreta en Sistemas Gradiente:** *Técnica A:* Convex Splitting con $F(a) - F(b) \leq F'(a)(a - b)$ y $G(a) - G(b) \leq G'(b)(a - b)$ (Enero 2025); *Técnica B:* Taylor centrado de orden 3 en el punto medio con restos de Lagrange (Enero 2026); *Técnica C:* Definición directa de la Secante (Octubre 2025).
- **5. Problemas de Contorno (PCo):** Principio del Máximo Continuo (2 pasos: estricto + perturbación εe^{Mx}), Principio del Máximo Discreto (combinación lineal convexa), formulación autoadjunta y condiciones de Neumann de orden 2 con nodo fantasma.

Índice General de Contenidos

Bloque 1: Problemas de Valor Inicial (PVI)

- 1.1 El Problema Continuo y Lemas de Gronwall
- 1.2 Esquemas de Un Paso: Consistencia y Taylor
- 1.3 Estabilidad y Teorema de Equivalencia de Lax
- 1.4 Catálogo de Esquemas (Euler, Heun, Runge, Taylor 2)
- 1.5 Esquemas Implícitos: TFI, MAS y Newton
- 1.6 Sistemas Disipativos y Lemas de Productos Discretos
- 1.7 Sistemas Gradiente: Convex Splitting, Secante, Punto Medio
- 1.8 Sistemas Conservativos y Sistemas Positivos

Bloque 2: Problemas de Contorno (PCo)

- 2.1 El Problema Continuo y Teorema de la Alternativa
- 2.2 Método de Tiro (Shooting Method) y Estabilidad
- 2.3 Principio del Máximo Continuo y Unicidad
- 2.4 Diferencias Finitas Centradas y Matriz Tridiagonal
- 2.5 Principio del Máximo Discreto y Buena Colocación
- 2.6 Consistencia y Convergencia de Orden 2
- 2.7 Formulación Autoadjunta y Neumann con Nodo Fantasma

Bloque 3: Laboratorio MATLAB (5/5)

Bloque 4: Exámenes Oficiales Resueltos al Detalle

Bloque 5: Chuleta Resumen y Fórmulas de Examen

1. Problemas de Valor Inicial (PVI): Continuo y Fundamentos

1.1 Planteamiento Continuo y Espacios de Solución

Consideramos el Problema de Valor Inicial (PVI) de Cauchy para un sistema de M ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_f] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Datos del problema: El dato inicial es $y_0 \in \mathbb{R}^M$. La función campo de vectores es $f: [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ (denominado "caso banda"). Se asume que f es *continua* respecto de (t, y) y *localmente Lipschitziana* respecto de y : para todo compacto $K \subset [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^M$, existe $L_K > 0$ tal que $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L_K |y_1 - y_2|$ para todo $(t, y_1), (t, y_2) \in K$.

DEFINICIÓN 1.1

Solución Diferencial vs Solución Integral

- **Solución Diferencial (Clásica):** Una función $\varphi \in C^1([t_0, t_f]; \mathbb{R}^M)$ tal que $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in [t_0, t_f]$, cumpliendo $\varphi(t_0) = y_0$.
- **Solución Integral (Mild Solution):** Una función $\varphi \in C([t_0, t_f]; \mathbb{R}^M)$ que satisface la ecuación integral de Volterra:

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$

Observación: Si f es continua, ambas definiciones son completamente equivalentes: toda solución integral es automáticamente de clase C^1 por el Teorema Fundamental del Cálculo.

TEOREMA 1

Existencia, Unicidad y Alternativa de Prolongabilidad (Picard-Lindelöf)

Bajo las hipótesis de continuidad de f y carácter localmente Lipschitziano en y :

1. Existe una **única solución local** φ definida en un intervalo $[t_0, t_0 + \delta)$ con $\delta > 0$.
2. **Alternativa de Prolongabilidad:** Dicha solución puede extenderse a una solución maximal definida en $[t_0, T_{\max})$. Se cumple exactamente una de las dos opciones:
 - La solución es **global** en todo el intervalo del problema, es decir, $T_{\max} > t_f$.
 - La solución **explota en tiempo finito** (blow-up): existe $t_* \leq t_f$ tal que $\limsup_{t \rightarrow t_*^-} |\varphi(t)| = +\infty$.

1.2 Lemas de Gronwall Continuos

Las desigualdades de Gronwall son la herramienta analítica fundamental para acotar soluciones de ecuaciones diferenciales, controlar su crecimiento y probar la estabilidad continua.

LEMA 1.1**Lema de Gronwall Continuo — Versión Diferencial**

Sea $v \in C^1([t_0, t_f])$ y sean $a, b \in C([t_0, t_f])$. Si v satisface la inecuación diferencial:

$$v'(t) \leq a(t)v(t) + b(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f],$$

entonces para todo $t \in [t_0, t_f]$ se tiene la cota:

$$v(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) v(t_0) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(r) dr\right) b(s) ds.$$

DEMOSTRACIÓN RIGUROSA (VERSIÓN DIFERENCIAL)

Paso 1: Construcción del factor integrante. Definimos la función $\mu(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$. Nótese que $\mu(t) > 0$ para todo t y su derivada respecto de t es:

$$\mu'(t) = -a(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) = -a(t)\mu(t).$$

Paso 2: Derivación del producto. Multiplicamos la inecuación original $v'(t) - a(t)v(t) \leq b(t)$ por $\mu(t) > 0$:

$$\frac{d}{dt}(v(t)\mu(t)) = v'(t)\mu(t) + v(t)\mu'(t) = [v'(t) - a(t)v(t)]\mu(t) \leq b(t)\mu(t).$$

Paso 3: Integración directa. Integrando ambos miembros entre t_0 y t :

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{ds}(v(s)\mu(s)) ds \leq \int_{t_0}^t b(s)\mu(s) ds \implies v(t)\mu(t) - v(t_0)\mu(t_0) \leq \int_{t_0}^t b(s)\mu(s) ds.$$

Como $\mu(t_0) = \exp(0) = 1$, despejamos $v(t)$ dividiendo por $\mu(t)$ (o multiplicando por $\mu(t)^{-1} = \exp(\int_{t_0}^t a(s) ds)$):

$$v(t) \leq \mu(t)^{-1}v(t_0) + \int_{t_0}^t b(s) \frac{\mu(s)}{\mu(t)} ds.$$

Observando que $\frac{\mu(s)}{\mu(t)} = \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r) dr + \int_{t_0}^t a(r) dr\right) = \exp\left(\int_s^t a(r) dr\right)$, se obtiene exactamente la tesis. ■

LEMA 1.2**Lema de Gronwall Continuo — Versión Integral**

Sean $u, b \in C([t_0, t_f])$ y $a \in C([t_0, t_f])$ con $a(t) \geq 0$. Si se cumple la inecuación integral:

$$u(t) \leq u(t_0) + \int_{t_0}^t (a(s)u(s) + b(s)) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_f],$$

entonces:

$$u(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) u(t_0) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(r) dr\right) b(s) ds.$$

DEMOSTRACIÓN RIGUROSA (VERSIÓN INTEGRAL)

Definimos la función auxiliar $w(t) = \int_{t_0}^t a(s)u(s) ds$. Claramente $w(t_0) = 0$ y $w'(t) = a(t)u(t)$. Por hipótesis, podemos escribir:

$$u(t) \leq u(t_0) + \int_{t_0}^t b(s) ds + w(t).$$

Como $a(t) \geq 0$, multiplicamos por $a(t)$ en ambos miembros:

$$w'(t) = a(t)u(t) \leq a(t)w(t) + a(t) \left[u(t_0) + \int_{t_0}^t b(s) ds \right].$$

Aplicando la versión diferencial (Lema 1.1) a la función $w(t)$ con dato inicial $w(t_0) = 0$, y deshaciendo la integración por partes para recuperar $u(t)$, se deduce directamente la desigualdad buscada. ■

1.3 Estimaciones Globales en Tiempo Finito y Estabilidad Continua

TEOREMA 2

Estimaciones Globales y Estabilidad respecto al Dato Inicial

Sea $\varphi(t)$ la solución del problema de Cauchy (1):

1. **Caso Acotado:** Si $\|f\|_\infty \leq M$ en $[t_0, t_f] \times \mathbb{R}^M$, entonces $|\varphi(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$.
2. **Caso Sublineal:** Si $|f(t, y)| \leq a(t)|y| + b(t)$ con $a(t) \geq 0$, entonces:

$$|\varphi(t)| \leq \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) |y_0| + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(r) dr\right) b(s) ds.$$

Consecuencia: No existe explosión en tiempo finito; la solución es necesariamente **global** en $[t_0, t_f]$.

3. **Caso Globalmente Lipschitz:** Si $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^M$:
 - Cota respecto al dato inicial: $|\varphi(t) - y_0| \leq \int_{t_0}^t \exp(L(t-s)) |f(s, y_0)| ds$.
 - **Estabilidad Continua (Sensibilidad a perturbaciones del dato inicial):** Si $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son soluciones con datos iniciales y_0 y z_0 respectivamente:

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \exp(L(t - t_0)) |y_0 - z_0|, \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$

DEMOSTRACIÓN: ESTABILIDAD CONTINUA RESPECTO AL DATO INICIAL

Restando las formulaciones integrales de ambas soluciones:

$$\varphi(t) - \psi(t) = (y_0 - z_0) + \int_{t_0}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds.$$

Tomando la norma euclídea y usando la desigualdad triangular junto con la propiedad de Lipschitz global:

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \leq |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t L |\varphi(s) - \psi(s)| ds.$$

Aplicamos directamente el Lema de Gronwall en su versión integral (Lema 1.2) con $u(t) = |\varphi(t) - \psi(t)|$, $a(s) = L$ y $b(s) = 0$:

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \exp\left(\int_{t_0}^t L ds\right) |y_0 - z_0| = \exp(L(t - t_0)) |y_0 - z_0|.$$

Esto demuestra que el problema continuo está bien condicionado en tiempo finito: perturbaciones pequeñas en el dato inicial producen desviaciones acotadas exponencialmente. ■

1.4 Esquemas Genéricos de Un Paso: Consistencia, Estabilidad y Convergencia

Para aproximar numéricamente la solución continua $\varphi(t)$ en $[t_0, t_f]$, introducimos una partición temporal:

$$P = \{t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_f\}, \quad h_n = t_{n+1} - t_n, \quad h = \max_{0 \leq n \leq N-1} h_n \quad (\text{diámetro de la partición}).$$

Definimos la **derivada discreta temporal hacia delante**:

$$\delta y_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}.$$

Un **esquema numérico de un paso** adopta la forma general:

$$\begin{cases} \text{Inicialización:} & y_0 \in \mathbb{R}^M \\ \text{Paso } n+1: & \delta y_{n+1} = \Phi(t_n, y_n, h_n), \quad n = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2)$$

donde $\Phi(t, y, h) : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^M \times [0, h_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^M$ es la **función incremento**, continua en (t, y) y localmente Lipschitziana respecto de y . Si Φ depende de y_{n+1} , el esquema es *implícito*; si sólo depende de y_n , es *explícito*.

DEFINICIÓN 1.2

Error Local de Consistencia y Órdenes de Consistencia

El **error local de consistencia** en la etapa n mide el residuo que deja la solución exacta $\varphi(t)$ al ser sustituida en la fórmula del esquema numérico:

$$E_n(h) = \frac{\varphi(t_n + h_n) - \varphi(t_n)}{h_n} - \Phi(t_n, \varphi(t_n), h_n) \in \mathbb{R}^M. \quad (3)$$

- **Consistencia en norma L^1** : El esquema es L^1 -consistente si $\|(E_n(h))_n\|_1 = \sum_{n=0}^{N(h)-1} h_n |E_n| \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.
- **Consistencia en norma L^∞** : El esquema es L^∞ -consistente si $\|(E_n(h))_n\|_\infty = \max_{0 \leq n \leq N-1} |E_n| \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.
- **Orden de consistencia $p > 0$** : Decimos que el esquema tiene orden de consistencia al menos p si existe una constante $C > 0$ y $h_* > 0$ tal que:

$$\|(E_n(h))_n\|_1 \leq Ch^p, \quad \forall h \leq h_* \quad (\text{o en norma } L^\infty : \|E(h)\|_\infty \leq Ch^p).$$

CÁLCULO DE DERIVADAS DE LA SOLUCIÓN EXACTA

Regla de la Cadena para Derivadas Sucesivas de $\varphi(t)$

Dado que $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, sus derivadas sucesivas respecto de t se obtienen diferenciando reiteradamente mediante la regla de la cadena:

- $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.
- $\varphi''(t) = \frac{d}{dt}[f(t, \varphi(t))] = f_t(t, \varphi(t)) + f_y(t, \varphi(t))\varphi'(t) = f_t + f_y f =: f^1(t, \varphi(t))$.
- $\varphi'''(t) = \frac{d}{dt}[f^1(t, \varphi(t))] = f_t^1 + f_y^1 f =: f^2(t, \varphi(t))$.

Por tanto, el desarrollo de Taylor de la derivada discreta de la solución exacta centrada en t_n es:

$$\frac{\varphi(t_n + h_n) - \varphi(t_n)}{h_n} = f(t_n, \varphi(t_n)) + \frac{h_n}{2} f^1(t_n, \varphi(t_n)) + \frac{h_n^2}{6} f^2(t_n, \varphi(t_n)) + O(h_n^3).$$

TEOREMA 3

Condiciones Algebraicas de Consistencia (Método de Taylor)

Desarrollando el error de consistencia $E_n(h_n)$ en serie de Taylor respecto de h_n en el centro $h = 0$:

$$E_n(h_n) = a_0 + a_1 h_n + \frac{1}{2!} a_2 h_n^2 + \frac{1}{3!} a_3 h_n^3 + \dots$$

donde los coeficientes son:

$$a_0 = f(t_n, \varphi(t_n)) - \Phi(t_n, \varphi(t_n), 0),$$

$$a_1 = \frac{1}{2} f^1(t_n, \varphi(t_n)) - \partial_h \Phi(t_n, \varphi(t_n), 0),$$

$$a_2 = \frac{1}{3} f^2(t_n, \varphi(t_n)) - \partial_{h^2}^2 \Phi(t_n, \varphi(t_n), 0),$$

$$a_k = \frac{1}{k+1} f^k(t_n, \varphi(t_n)) - \partial_{h^k}^k \Phi(t_n, \varphi(t_n), 0).$$

Criterio Operativo de Consistencia:

- El esquema es **consistente (orden ≥ 1)** $\iff a_0 = 0 \iff \Phi(t, y, 0) = f(t, y)$.
- El esquema tiene **orden al menos 2** $\iff a_0 = 0$ y $\partial_h \Phi(t, y, 0) = \frac{1}{2} f^1(t, y)$.
- El esquema tiene **orden al menos 3** $\iff a_0 = a_1 = 0$ y $\partial_{h^2}^2 \Phi(t, y, 0) = \frac{1}{3} f^2(t, y)$.
- El orden exacto es p si y sólo si $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ y $a_p \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3

Por definición: $E_n(h_n) = A(h_n) - B(h_n)$, donde:

$$A(h_n) = \frac{\varphi(t_n + h_n) - \varphi(t_n)}{h_n} = \varphi'(t_n) + \frac{h_n}{2}\varphi''(t_n) + \frac{h_n^2}{6}\varphi'''(t_n) + \dots = f + \frac{h_n}{2}f^1 + \frac{h_n^2}{6}f^2 + \dots$$

$$B(h_n) = \Phi(t_n, \varphi(t_n), h_n) = \Phi(t_n, \varphi(t_n), 0) + h_n \partial_h \Phi(t_n, \varphi(t_n), 0) + \frac{h_n^2}{2} \partial_{h^2}^2 \Phi(t_n, \varphi(t_n), 0) + \dots$$

Restando ambas expresiones término a término e igualando las potencias de h_n :

$$E_n(h_n) = [f - \Phi(\cdot, 0)] + \left[\frac{1}{2}f^1 - \partial_h \Phi(\cdot, 0) \right] h_n + \frac{1}{2!} \left[\frac{1}{3}f^2 - \partial_{h^2}^2 \Phi(\cdot, 0) \right] h_n^2 + \dots$$

De aquí surgen de forma inmediata los coeficientes a_k . La anulación de los primeros p términos garantiza que $E_n(h_n) = O(h_n^p)$. ■

1.5 Lemas de Gronwall Discretos

Análogamente al caso continuo, el control del error y la estabilidad de esquemas discretos requiere lemas de tipo Gronwall para sucesiones numéricas.

LEMA 2.1

Lema de Gronwall Discreto Estándar (Explícito)

Sean sucesiones de números no negativos $(u_n)_{n \geq 0}$, $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ y pasos $h_n > 0$. Si se cumple:

$$\delta u_{n+1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{h_n} \leq a_n u_n + b_n, \quad \forall n \geq 0,$$

entonces para todo $n \geq 1$:

$$u_n \leq \exp \left(\sum_{m=0}^{n-1} h_m a_m \right) u_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \exp \left(\sum_{k=m+1}^{n-1} h_k a_k \right) h_m b_m.$$

DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN Y ACOTACIÓN EXPONENCIAL

Paso 1: Relación de recurrencia directa. Multiplicando la inecuación por h_n :

$$u_{n+1} \leq (1 + h_n a_n)u_n + h_n b_n.$$

Desarrollando los primeros términos:

$$u_1 \leq (1 + h_0 a_0)u_0 + h_0 b_0,$$

$$u_2 \leq (1 + h_1 a_1)u_1 + h_1 b_1 \leq (1 + h_1 a_1)(1 + h_0 a_0)u_0 + (1 + h_1 a_1)h_0 b_0 + h_1 b_1.$$

Por inducción completa para cualquier $n \geq 1$:

$$u_n \leq \left(\prod_{m=0}^{n-1} (1 + h_m a_m) \right) u_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \left(\prod_{k=m+1}^{n-1} (1 + h_k a_k) \right) h_m b_m.$$

Paso 2: Acotación de productos por exponenciales. Utilizamos la desigualdad elemental $1 + x \leq \exp(x)$, válida para todo $x \geq 0$ (ya que la función exponencial es convexa y su recta tangente en $x = 0$ es $1 + x$). Por tanto:

$$\prod_{k=m+1}^{n-1} (1 + h_k a_k) \leq \prod_{k=m+1}^{n-1} \exp(h_k a_k) = \exp \left(\sum_{k=m+1}^{n-1} h_k a_k \right).$$

Sustituyendo esta cota en la expresión de u_n se concluye la demostración. ■

LEMA 2.2

Lema de Gronwall Discreto Generalizado (Implícito)

Sean sucesiones de números no negativos tales que:

$$\delta u_{n+1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{h_n} \leq a_n u_{n+1} + b_n u_n + c_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Si el paso satisface la condición de pequeñez:

$$h_n a_n \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq 0,$$

entonces la derivada discreta satisface la cota puramente explícita:

$$\delta u_{n+1} \leq 2(a_n + b_n)u_n + 2c_n.$$

DEMOSTRACIÓN RIGUROSA (¡PREGUNTA TÍPICA DE EXAMEN!)

Paso 1: Agrupación de términos en u_{n+1} . Multiplicamos la inecuación $\frac{u_{n+1}-u_n}{h_n} \leq a_n u_{n+1} + b_n u_n + c_n$ por h_n :

$$u_{n+1} - u_n \leq h_n a_n u_{n+1} + h_n b_n u_n + h_n c_n.$$

Pasamos $h_n a_n u_{n+1}$ al miembro izquierdo:

$$(1 - h_n a_n) u_{n+1} - u_n \leq h_n b_n u_n + h_n c_n.$$

Sumamos y restamos $(1 - h_n a_n) u_n$ en el primer miembro para reconstruir el incremento $(u_{n+1} - u_n)$:

$$(1 - h_n a_n)(u_{n+1} - u_n) + (1 - h_n a_n) u_n - u_n \leq h_n b_n u_n + h_n c_n$$

$$(1 - h_n a_n)(u_{n+1} - u_n) - h_n a_n u_n \leq h_n b_n u_n + h_n c_n$$

$$(1 - h_n a_n)(u_{n+1} - u_n) \leq h_n(a_n + b_n) u_n + h_n c_n.$$

Paso 2: Acotación del factor inverso. Como por hipótesis $h_n a_n \leq 1/2$, se tiene que:

$$1 - h_n a_n \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \implies \frac{1}{1 - h_n a_n} \leq 2.$$

Dividiendo ambos miembros por $h_n(1 - h_n a_n) > 0$:

$$\delta u_{n+1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{h_n} \leq \frac{1}{1 - h_n a_n} (a_n + b_n) u_n + \frac{1}{1 - h_n a_n} c_n \leq 2(a_n + b_n) u_n + 2c_n.$$

Esto reduce la relación implícita a la hipótesis del Lema de Gronwall estándar con coeficientes efectivos $\tilde{a}_n = 2(a_n + b_n)$ y $\tilde{b}_n = 2c_n$. ■

1.6 Estabilidad Numérica y Teorema de Equivalencia de Lax

DEFINICIÓN 1.3

Estabilidad L^∞ frente a Perturbaciones L^1

Consideremos el esquema numérico original (2) junto con cualquier **esquema perturbado**:

$$\begin{cases} z_0 = y_0 + \varepsilon \\ \delta z_{n+1} = \Phi(t_n, z_n, h_n) + \delta_n, \quad n = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (4)$$

donde $\varepsilon \in \mathbb{R}^M$ representa un error en el dato inicial y $\delta_n \in \mathbb{R}^M$ representa perturbaciones locales en cada etapa (errores de redondeo algebraico o residuos). Definimos el **error de estabilidad** como $s_n = z_n - y_n$.

El esquema es L^∞ -**estable** si existen $h_* \leq h_{\max}$ y constantes $C_0, C_1 > 0$ independientes de la partición tales que:

$$|s_n| \leq C_0 |s_0| + C_1 \sum_{m=0}^{n-1} h_m |\delta_m|, \quad \forall n = 1, \dots, N, \quad \forall h \leq h_*.$$

TEOREMA 4

Condición Suficiente de Estabilidad (Lipschitzianidad)

Si la función incremento $\Phi(t, y, h)$ es globalmente Lipschitziana respecto a y con constante $L > 0$ (o si el esquema permanece dentro de un dominio acotado donde Φ es Lipschitziana), entonces el esquema (2) es L^∞ -estable. Concretamente:

$$|s_n| \leq \exp(L(t_n - t_0))|s_0| + \sum_{m=0}^{n-1} \exp(L(t_n - t_{m+1}))h_m|\delta_m|, \quad \forall n \geq 1.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE ESTABILIDAD

Restando la ecuación del esquema no perturbado (2) de la del esquema perturbado (4):

$$\delta s_{n+1} = \delta z_{n+1} - \delta y_{n+1} = \Phi(t_n, z_n, h_n) - \Phi(t_n, y_n, h_n) + \delta_n.$$

Tomando la norma euclídea y aplicando la hipótesis de Lipschitz:

$$|\delta s_{n+1}| \leq |\Phi(t_n, z_n, h_n) - \Phi(t_n, y_n, h_n)| + |\delta_n| \leq L|z_n - y_n| + |\delta_n| = L|s_n| + |\delta_n|.$$

Observando que $\delta|s_{n+1}| = \frac{|s_{n+1}| - |s_n|}{h_n} \leq \frac{|s_{n+1} - s_n|}{h_n} = |\delta s_{n+1}| \leq L|s_n| + |\delta_n|$. Aplicamos el Lema de Gronwall Discreto estándar (Lema 2.1) con $u_n = |s_n|$, $a_n = L$ y $b_n = |\delta_n|$:

$$|s_n| \leq \exp\left(\sum_{m=0}^{n-1} h_m L\right) |s_0| + \sum_{m=0}^{n-1} \exp\left(\sum_{k=m+1}^{n-1} h_k L\right) h_m |\delta_m|.$$

Dado que $\sum_{m=0}^{n-1} h_m = t_n - t_0$ y $\sum_{k=m+1}^{n-1} h_k = t_n - t_{m+1}$, queda demostrada la estabilidad con $C_0 = e^{L(t_f - t_0)}$ y $C_1 = e^{L(t_f - t_0)}$. ■

TEOREMA 5

Teorema Fundamental de Equivalencia de Lax

«Consistencia más Estabilidad implica Convergencia».

Sea $e_n = \varphi(t_n) - y_n$ el **error global de convergencia**. Si el esquema (2) es L^∞ -estable y tiene orden de consistencia $p > 0$, entonces el esquema es L^∞ -convergente con el mismo orden p :

$$\|(e_n)_n\|_\infty = \max_{0 \leq n \leq N} |\varphi(t_n) - y_n| \leq Ch^p, \quad \forall h \leq h_*.$$

DEMOSTRACIÓN MAESTRA DE LAX

La idea fundamental consiste en comparar la solución exacta $\varphi(t_n)$ con el esquema numérico. Recordemos la definición del error local de consistencia (3):

$$\frac{\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)}{h_n} = \Phi(t_n, \varphi(t_n), h_n) + E_n(h_n).$$

¡Esto significa exactamente que la sucesión de la solución exacta $z_n := \varphi(t_n)$ es la solución de un **esquema perturbado** (4) con perturbación $\delta_n = E_n(h_n)$ y dato inicial $z_0 = \varphi(t_0) = y_0$ (es decir, $\varepsilon = s_0 = 0$)!

Por tanto, el error de convergencia $e_n = \varphi(t_n) - y_n$ coincide con el error de estabilidad s_n . Aplicando directamente la propiedad de estabilidad (Teorema 4):

$$|e_n| = |s_n| \leq C_0 |e_0| + C_1 \sum_{m=0}^{n-1} h_m |E_m(h_m)|.$$

Si el dato inicial coincide exactamente, $e_0 = 0$. Además, por la hipótesis de consistencia de orden p , se tiene que $\sum_{m=0}^{N-1} h_m |E_m| \leq \|E(h)\|_1 \leq Ch^p$. En consecuencia:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq C_1 \sum_{m=0}^{N-1} h_m |E_m| \leq C_1 Ch^p = \tilde{C}h^p.$$

Queda demostrado con total elegancia que el error global de convergencia hereda el orden de consistencia gracias a la estabilidad. ■

1.7 Catálogo Completo de Esquemas Clásicos de Un Paso

A continuación se resumen los esquemas numéricos más importantes de la asignatura, sus fórmulas, órdenes de consistencia y condiciones de estabilidad:

Nombre del Esquema	Tipo	Fórmula Matemática $\delta y_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} =$	Orden p	Condición Estabilidad
Euler Explícito	Explícito	$f(t_n, y_n)$	1	f Lipschitz (Incondicional)
Euler Implícito	Implícito	$f(t_{n+1}, y_{n+1})$	1	$h_n L \leq 1/2$
Trapezio Explícito (Heun)	Explícito (2 et.)	$\frac{1}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + h_n f(t_n, y_n))]$	2	f Lipschitz
Punto Medio Explícito (Runge)	Explícito (2 et.)	$f(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n))$	2	f Lipschitz
Taylor 2 Explícito	Explícito	$f(t_n, y_n) + \frac{h_n}{2} (f_t + f_y f)(t_n, y_n)$	2	f, f^1 Lipschitz
Trapezio Implícito (Crank-Nicolson)	Implícito	$\frac{1}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$	2	$h_n L \leq 1$
Punto Medio Implícito	Implícito	$f(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2})$	2	$h_n L \leq 1$
Taylor 2 Implícito	Implícito	$f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{h_n}{2} f^1(t_{n+1}, y_{n+1})$	2	$h_n L \leq 1/2$
Trapezio Implícito-BDF2	Implícito (2 et.)	$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = \frac{3}{4} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{4} f(t_n, y_n)$	2	$h_n L$ pequeño

DEMOSTRACIÓN: CONSISTENCIA DE EULER EXPLÍCITO POR DOS VÍAS

Vía 1 (Directa por Taylor):

Sea $\varphi \in C^2$. Desarrollamos $\varphi(t_n + h_n)$ en t_n :

$$\varphi(t_n + h_n) = \varphi(t_n) + h_n \varphi'(t_n) + \frac{h_n^2}{2} \varphi''(\xi_n) = \varphi(t_n) + h_n f(t_n, \varphi(t_n)) + \frac{h_n^2}{2} \varphi''(\xi_n).$$

Sustituyendo en el error de consistencia:

$$E_n(h_n) = \frac{\varphi(t_n + h_n) - \varphi(t_n)}{h_n} - f(t_n, \varphi(t_n)) = \frac{h_n}{2} \varphi''(\xi_n).$$

Tomando normas: $|E_n(h_n)| \leq \frac{h_n}{2} \|\varphi''\|_\infty = O(h_n) \implies$ **Orden 1.**

Vía 2 (Vía Teorema 3):

Aquí $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$. Claramente no depende de h :

$$a_0 = f(t_n, \varphi(t_n)) - \Phi(t_n, \varphi(t_n), 0) = f - f = 0 \implies \text{Orden al menos 1.}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} f^1(t_n, \varphi(t_n)) - \partial_h \Phi(t_n, \varphi(t_n), 0) = \frac{1}{2} f^1 - 0 = \frac{1}{2} f^1 \neq 0 \implies \text{Orden exactamente 1.}$$

DEMOSTRACIÓN: ESTABILIDAD DE EULER IMPLÍCITO (¿POR QUÉ APARECE $H_N L \leq 1/2$?)

Consideremos el esquema perturbado para Euler Implícito:

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h_n} = f(t_{n+1}, z_{n+1}) + \delta_n, \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = f(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Restando ambas ecuaciones para el error $s_n = z_n - y_n$:

$$\delta s_{n+1} = \frac{s_{n+1} - s_n}{h_n} = f(t_{n+1}, z_{n+1}) - f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \delta_n.$$

Tomando normas y usando la condición de Lipschitz $|f(t, z) - f(t, y)| \leq L|z - y|$:

$$\frac{|s_{n+1}| - |s_n|}{h_n} \leq \left| \frac{s_{n+1} - s_n}{h_n} \right| \leq L|s_{n+1}| + |\delta_n|.$$

¡Esta inecuación tiene el término desconocido $|s_{n+1}|$ en el miembro derecho! Es exactamente la hipótesis del **Lema de Gronwall Discreto Generalizado (Lema 2.2)** con $a_n = L$, $b_n = 0$ y $c_n = |\delta_n|$. Bajo la condición de pequeñez:

$$h_n L \leq \frac{1}{2},$$

el Lema 2.2 garantiza que $\frac{|s_{n+1}| - |s_n|}{h_n} \leq 2L|s_n| + 2|\delta_n|$, lo que por el Lema 2.1 estándar conduce a la cota exponencial:

$$|s_n| \leq \exp(2L(t_n - t_0))|s_0| + 2 \sum_{m=0}^{n-1} \exp(2L(t_n - t_{m+1}))h_m|\delta_m|.$$

Esto prueba rigurosamente la L^∞ -estabilidad de Euler Implícito. ■

1.8 Esquemas Implícitos: Buena Colocación y Métodos Iterativos

En un esquema implícito, para calcular el siguiente valor y_{n+1} a partir de y_n no basta con evaluar una fórmula: es necesario resolver un **sistema algebraico no lineal** de dimensión M :

$$F(y, h_n) := y - y_n - h_n \Phi(t_n, y, h_n) = 0.$$

¡PREGUNTA FIJA DE EXAMEN! (PLANTILLA DE 3 PASOS)

Existencia y Unicidad Local via Teorema de la Función Implícita (TFI)

Pregunta habitual: «Dado y_n , probar la existencia y unicidad local de y_{n+1} aplicando el Teorema de la Función Implícita.»

Plantilla universal de respuesta perfecta para el examen:

1. Paso 1: Definir la función $F(y, h)$.

Sea $F : \mathbb{R}^M \times [0, h_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^M$ definida por:

$$F(y, h) = y - y_n - h\Phi(t_n, y, h).$$

Como f (y por tanto Φ) es de clase C^1 respecto a sus argumentos, la función F es de clase C^1 en un entorno de $(y_n, 0)$.

2. Paso 2: Comprobar el punto base $h = 0$.

Evaluamos en $h = 0$:

$$F(y_n, 0) = y_n - y_n - 0 \cdot \Phi(t_n, y_n, 0) = 0.$$

Por tanto, $(y_n, 0)$ es una raíz del sistema.

3. Paso 3: Calcular el Jacobiano respecto de y y verificar regularidad.

Diferenciando F respecto a la variable incógnita y :

$$\partial_y F(y, h) = \text{Id}_{M \times M} - h\partial_y \Phi(t_n, y, h).$$

Evaluando en el punto $(y_n, 0)$:

$$\partial_y F(y_n, 0) = \text{Id}_{M \times M} - 0 \cdot \partial_y \Phi(t_n, y_n, 0) = \text{Id}_{M \times M}.$$

La matriz identidad es trivialmente regular (invertible), pues $\det(\text{Id}) = 1 \neq 0$.

Conclusión por TFI: En virtud del Teorema de la Función Implícita, existen un entorno abierto $V \subset \mathbb{R}$ de $h = 0$, un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^M$ de y_n , y una **única función continua** $g : V \rightarrow U$ tal que $g(0) = y_n$ y:

$$F(g(h), h) = 0, \quad \forall h \in V.$$

Por tanto, para todo paso h suficientemente pequeño, existe una **única solución local** $y_{n+1} = g(h)$ en las proximidades de y_n . ■

Resolución Numérica: Métodos de Punto Fijo (MAS) y Newton

En la práctica computacional, el valor exacto de y_{n+1} se aproxima mediante algoritmos iterativos:

MÉTODO 1: APROXIMACIONES SUCESIVAS (MAS)

Iteración de Punto Fijo $y^{(k+1)} = G(y^{(k)})$

Reescribimos la ecuación implícita en la forma $y = G(y)$, donde por ejemplo para Euler Implícito:

$$G(y) = y_n + hf(t_{n+1}, y).$$

La iteración es $y^{(k+1)} = G(y^{(k)})$ partiendo de $y^{(0)} = y_n$.

- **Convergencia Local:** Por el Teorema del Radio Espectral de Ostrowski, el MAS converge localmente a la raíz y_{n+1} si y sólo si:

$$\rho(\nabla G(y_{n+1})) < 1 \iff h\rho(f_y(t_{n+1}, y_{n+1})) < 1.$$

- **Convergencia Global (Banach):** Si f es globalmente Lipschitz con constante L , la función G es estrictamente contractiva si:

$$hL < 1.$$

- **En Trapecio Implícito:** $G(y) = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) + \frac{h}{2}f(t_{n+1}, y) \implies \nabla G = \frac{h}{2}f_y \implies$ convergencia si $\frac{h}{2}\rho(f_y) < 1 \iff h\rho(f_y) < 2$.

MÉTODO 2: MÉTODO DE NEWTON (RAPHSON)

Algoritmo Iterativo de Newton y Criterio de Regularidad

Para resolver el sistema no lineal $F(y) = 0$, el método de Newton aproxima la función por su plano tangente en la iteración k :

$$F(y^{(k)}) + F'(y^{(k)})(y^{(k+1)} - y^{(k)}) = 0 \implies F'(y^{(k)})\Delta y^{(k)} = -F(y^{(k)}), \quad y^{(k+1)} = y^{(k)} + \Delta y^{(k)}.$$

donde la matriz Jacobiana para Euler Implícito es:

$$F'(y) = \text{Id} - hf_y(t_{n+1}, y).$$

Condiciones de Convergencia Local:

1. **Condición Necesaria y Suficiente:** La matriz Jacobiana evaluada en la solución $F'(y_{n+1}) = \text{Id} - hf_y(t_{n+1}, y_{n+1})$ debe ser **regular (no singular)**. En ese caso, la convergencia es cuadrática localmente: $|y^{(k+1)} - y_{n+1}| \leq C|y^{(k)} - y_{n+1}|^2$.
2. **Condición Suficiente de Pequeñez de h :** Utilizando el desarrollo en serie de Neumann de $(\text{Id} - A)^{-1}$, la matriz $\text{Id} - hf_y$ es invertible para cualquier paso que satisfaga:

$$h\rho(f_y(t_{n+1}, y_{n+1})) < 1 \quad (\text{o } h\|f_y\| < 1).$$

3. **Convergencia Incondicional (Matrices Semidefnidas Negativas):** Si la matriz Jacobiana f_y es simétrica y *semidefnida negativa* (es decir, todos sus autovalores $\lambda_i \leq 0$):

$$\text{autovalores de } F' = 1 - h\lambda_i \geq 1 > 0, \quad \forall h > 0.$$

¡Por tanto, $\det(F') \geq 1 \neq 0$, y el método de Newton es invertible para **cualquier paso** $h > 0$ sin ninguna restricción de pequeñez!

1.9 Problemas Disipativos y Estabilidad a Tiempo Infinito

Muchos modelos físicos y biológicos están definidos en intervalos no acotados $[t_0, +\infty)$. En estos casos no basta la estabilidad en tiempo finito: es crucial preservar el comportamiento asintótico hacia equilibrios.

DEFINICIÓN 1.4

Sistema Disipativo y Función de Energía

Un sistema de EDOs $y'(t) = f(t, y(t))$ en $\mathbb{R}^M$ se dice **disipativo** si existen:

- Una **función de energía (o potencial)** $F = F(y) \in \mathbb{R}$, acotada inferiormente (por ejemplo $F(y) \geq 0$) y coerciva ($F(y) \rightarrow +\infty$ cuando $|y| \rightarrow +\infty$).
- Una **función de disipación** $D = D(y) \geq 0$ tal que a lo largo de toda solución continua $\varphi(t)$:

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) + D(\varphi(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

Consecuencias Analíticas Fundamentales:

1. Como $D \geq 0$, la energía es monótona no creciente: $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = -D(\varphi(t)) \leq 0$.
2. Como F está acotada inferiormente, existe el límite finito asintótico $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(\varphi(t)) = F_\infty \geq 0$.
3. Integrando la ley de disipación en $[t_0, +\infty)$: $\int_{t_0}^{+\infty} D(\varphi(t)) dt = F(y_0) - F_\infty < +\infty$ (la disipación total es finita).
4. Por coercividad de F , las trayectorias están uniformemente acotadas en $\mathbb{R}^M$. En consecuencia, el **conjunto $\omega(y_0)$ -límite** es no vacío, compacto, conexo e invariante, y está contenido en la hipersuperficie equipotencial:

$$\omega(y_0) \subset \{y_* \in \mathbb{R}^M : F(y_*) = F_\infty\}.$$

LEMA 4 (LEMA MAESTRO DE DISCRETIZACIÓN)

Aproximaciones Discretas del Producto Escalar $(y'(t), y(t))$

En el continuo, la derivada de la norma al cuadrado es $(y'(t), y(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y(t)|^2$. En el discreto, dependiendo del punto en el que se evalúe el producto, surgen tres identidades algebraicas exactas:

1. Evaluación Hacia Delante (Euler Explícito):

$$(y_{n+1} - y_n, y_n) = \frac{1}{2} (|y_{n+1}|^2 - |y_n|^2) - \frac{1}{2} |y_{n+1} - y_n|^2.$$

Efecto: El término residual $-\frac{1}{2} |y_{n+1} - y_n|^2$ introduce una **fuerza artificial de energía** (inestabilidad).

2. Evaluación Hacia Atrás (Euler Implícito):

$$(y_{n+1} - y_n, y_{n+1}) = \frac{1}{2} (|y_{n+1}|^2 - |y_n|^2) + \frac{1}{2} |y_{n+1} - y_n|^2.$$

Efecto: El término residual $+\frac{1}{2} |y_{n+1} - y_n|^2$ introduce **disipación numérica artificial**, reforzando la estabilidad.

3. Evaluación Centrada (Punto Medio / Trapecio):

$$\left(y_{n+1} - y_n, \frac{y_{n+1} + y_n}{2} \right) = \frac{1}{2} (|y_{n+1}|^2 - |y_n|^2).$$

Efecto: ¡El residuo es **exactamente cero**! El método del punto medio no disipa ni genera energía cuadrática artificial.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4

Basta desarrollar las identidades notables del producto escalar euclídeo:

- Para 1: $|y_{n+1}|^2 = |y_n + (y_{n+1} - y_n)|^2 = |y_n|^2 + 2(y_{n+1} - y_n, y_n) + |y_{n+1} - y_n|^2$. Despejando el producto escalar se obtiene la fórmula 1.
- Para 2: $|y_n|^2 = |y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n)|^2 = |y_{n+1}|^2 - 2(y_{n+1} - y_n, y_{n+1}) + |y_{n+1} - y_n|^2$. Despejando se obtiene la fórmula 2.
- Para 3: $(y_{n+1} - y_n, y_{n+1} + y_n) = |y_{n+1}|^2 - |y_n|^2$. Dividiendo por 2 se obtiene la fórmula 3. ■

1.10 Sistemas Gradiente: $y' + \nabla F(y) = 0$ y Leyes de Energía Discreta

Un sistema autónomo $y' = f(y)$ en $\mathbb{R}^M$ se denomina **sistema gradiente** si existe un potencial $F \in C^2(\mathbb{R}^M; \mathbb{R})$ acotado inferiormente y coercivo tal que $f(y) = -\nabla F(y)$.

$$y'(t) + \nabla F(y(t)) = 0. \quad (6)$$

Multiplicando escalarmente por $y'(t)$:

$$(y'(t), y'(t)) + (\nabla F(y(t)), y'(t)) = 0 \implies |y'(t)|^2 + \frac{d}{dt} F(y(t)) = 0.$$

Esta es la **ley continua de disipación de energía**. La energía decrece estrictamente a lo largo de las trayectorias salvo en los puntos de equilibrio, donde $\nabla F(y_*) = 0$.

DEFINICIÓN 1.5**Estabilidad de Energía Discreta**

Un esquema numérico $\delta y_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}$ para el sistema gradiente (6) es **energéticamente estable** si satisface la desigualdad discreta de disipación de energía:

$$\frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{h_n} + \left| \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \right|^2 \leq 0, \quad \forall n \geq 0. \quad (7)$$

Propiedad asintótica: Sumando telescópicamente $h_n \times (7)$ para $n = 0, \dots, \infty$:

$$F(y_N) + \sum_{n=0}^{N-1} h_n \left| \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \right|^2 \leq F(y_0).$$

Como $F \geq 0$, la serie es convergente, lo que implica que $\frac{|y_{n+1} - y_n|^2}{h_n} \rightarrow 0$, y bajo malla regular, $y_{n+1} - y_n \rightarrow 0$. El conjunto ω -límite discreto está formado exclusivamente por **puntos críticos** $\nabla F(y_*) = 0$.

TEOREMA 9 (¡PREGUNTA ESTRELLA DE EXAMEN! — ENERO 2025)**Esquema de Convex Splitting (Implícito-Explícito)**

Supongamos que el potencial admite una descomposición de la forma:

$$F(y) = F_c(y) + F_e(y),$$

donde F_c es **convexa** ($D^2 F_c \geq 0$) y F_e es **cóncava** ($D^2 F_e \leq 0$). Se define el **esquema de Convex Splitting** (evaluando la parte convexa de forma implícita y la parte cóncava de forma explícita):

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} + \nabla F_c(y_{n+1}) + \nabla F_e(y_n) = 0. \quad (8)$$

Entonces el esquema es **incondicionalmente energéticamente estable** para cualquier paso $h_n > 0$.

DEMOSTRACIÓN MAESTRA VIA DESIGUALDADES DE CONVEXIDAD/CONCAVIDAD

Paso 1: Recordar las desigualdades de convexidad y concavidad.

Por ser F_c una función diferenciable y convexa, su gráfica queda por encima de su plano tangente en cualquier punto:

$$F_c(z) \geq F_c(y) + (\nabla F_c(y), z - y), \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^M.$$

Eligiendo $y = y_{n+1}$ y $z = y_n$:

$$F_c(y_n) \geq F_c(y_{n+1}) + (\nabla F_c(y_{n+1}), y_n - y_{n+1}) = F_c(y_{n+1}) - (\nabla F_c(y_{n+1}), y_{n+1} - y_n).$$

Reordenando:

$$F_c(y_{n+1}) - F_c(y_n) \leq (\nabla F_c(y_{n+1}), y_{n+1} - y_n). \quad (A)$$

Por ser F_e una función diferenciable y cóncava (es decir, $-F_e$ convexa), su gráfica queda por debajo de su plano tangente en cualquier punto:

$$F_e(z) \leq F_e(y) + (\nabla F_e(y), z - y), \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^M.$$

Eligiendo $y = y_n$ y $z = y_{n+1}$:

$$F_e(y_{n+1}) - F_e(y_n) \leq (\nabla F_e(y_n), y_{n+1} - y_n). \quad (B)$$

Paso 2: Suma de desigualdades y sustitución del esquema.

Sumando (A) y (B):

$$F(y_{n+1}) - F(y_n) = [F_c(y_{n+1}) - F_c(y_n)] + [F_e(y_{n+1}) - F_e(y_n)] \leq (\nabla F_c(y_{n+1}) + \nabla F_e(y_n), y_{n+1} - y_n).$$

Ahora despejamos la suma de gradientes a partir de la definición del esquema (8):

$$\nabla F_c(y_{n+1}) + \nabla F_e(y_n) = -\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = -\delta y_{n+1}.$$

Sustituyendo en la desigualdad anterior:

$$F(y_{n+1}) - F(y_n) \leq \left(-\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}, y_{n+1} - y_n \right) = -\frac{1}{h_n} |y_{n+1} - y_n|^2.$$

Dividiendo ambos miembros por $h_n > 0$:

$$\frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{h_n} \leq -\left| \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \right|^2 \implies \frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{h_n} + \left| \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \right|^2 \leq 0.$$

¡Queda demostrada la estabilidad incondicional de energía! Válida para cualquier tamaño de paso h_n . ■

¡PROBLEMA DE EXAMEN ENERO 2026!

Ley de Energía Discreta para el Punto Medio Implícito via Taylor Centrado

Enunciado oficial: Consideramos el sistema gradiente autónomo $y' = -F'(y)$ con $F \in C^3(\mathbb{R})$. Se aproxima por el método implícito del punto medio:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = -F' \left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2} \right).$$

Probar que el método satisface la ley de energía discreta:

$$\frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{h_n} + \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \right)^2 = h_n^2 \frac{1}{6} \frac{1}{2^3} (F'''(\xi_n) + F'''(\eta_n)) \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \right)^3.$$

Paso 1: Simetría respecto al punto medio.

Definimos el punto medio $\bar{y} = \frac{y_{n+1} + y_n}{2}$ y el incremento $\Delta_n = y_{n+1} - y_n$. Observemos que ambos extremos se encuentran exactamente a la misma distancia de $\bar{y}$ pero en direcciones opuestas:

$$y_{n+1} = \bar{y} + \frac{\Delta_n}{2}, \quad y_n = \bar{y} - \frac{\Delta_n}{2}.$$

Paso 2: Desarrollos de Taylor de orden 3 con resto de Lagrange centrados en $\bar{y}$.

Desarrollamos $F(y_{n+1})$ con centro en $\bar{y}$ e incremento $+\frac{\Delta_n}{2}$:

$$F(y_{n+1}) = F(\bar{y}) + F'(\bar{y}) \frac{\Delta_n}{2} + \frac{F''(\bar{y})}{2} \left(\frac{\Delta_n}{2} \right)^2 + \frac{F'''(\xi_n)}{6} \left(\frac{\Delta_n}{2} \right)^3, \quad \xi_n \in (\bar{y}, y_{n+1}).$$

Desarrollamos $F(y_n)$ con centro en $\bar{y}$ e incremento $-\frac{\Delta_n}{2}$:

$$F(y_n) = F(\bar{y}) - F'(\bar{y}) \frac{\Delta_n}{2} + \frac{F''(\bar{y})}{2} \left(-\frac{\Delta_n}{2} \right)^2 + \frac{F'''(\eta_n)}{6} \left(-\frac{\Delta_n}{2} \right)^3, \quad \eta_n \in (y_n, \bar{y}).$$

Como $\left(-\frac{\Delta_n}{2}\right)^2 = +\left(\frac{\Delta_n}{2}\right)^2$ y $\left(-\frac{\Delta_n}{2}\right)^3 = -\left(\frac{\Delta_n}{2}\right)^3$:

$$F(y_n) = F(\bar{y}) - F'(\bar{y}) \frac{\Delta_n}{2} + \frac{F''(\bar{y})}{2} \left(\frac{\Delta_n}{2} \right)^2 - \frac{F'''(\eta_n)}{6} \left(\frac{\Delta_n}{2} \right)^3.$$

Paso 3: Restar ambas ecuaciones (¡Cancelación mágica de los términos pares!).

Al restar $F(y_{n+1}) - F(y_n)$:

- Los términos constantes $F(\bar{y}) - F(\bar{y}) = 0$ se cancelan.
- Los términos impares de primer orden se suman: $F'(\bar{y}) \frac{\Delta_n}{2} - (-F'(\bar{y}) \frac{\Delta_n}{2}) = F'(\bar{y}) \Delta_n$.
- Los términos cuadráticos pares $\frac{F''(\bar{y})}{2} \left(\frac{\Delta_n}{2} \right)^2$ se cancelan idénticamente.
- Los términos de orden 3 se suman: $\frac{1}{6} \frac{1}{2^3} (F'''(\xi_n) + F'''(\eta_n)) \Delta_n^3$.

Obtenemos la identidad exacta:

$$F(y_{n+1}) - F(y_n) = F'(\bar{y}) \Delta_n + \frac{1}{6} \frac{1}{2^3} (F'''(\xi_n) + F'''(\eta_n)) \Delta_n^3. \quad (C)$$

Paso 4: Despejar $F'(\bar{y})$ y multiplicar por el esquema.

Dividiendo (C) por $\Delta_n = y_{n+1} - y_n$:

$$F'(\bar{y}) = \frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{y_{n+1} - y_n} - \frac{1}{6} \frac{1}{2^3} (F'''(\xi_n) + F'''(\eta_n)) (y_{n+1} - y_n)^2.$$

Ahora, el esquema numérico establece que:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = -F'(\bar{y}).$$

Multiplicamos ambos miembros por $\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}$:

$$\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \right)^2 = -F'(\bar{y}) \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \right).$$

Sustituimos la expresión obtenida para $F'(\bar{y})$:

$$\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \right)^2 = - \left[\frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{y_{n+1} - y_n} - \frac{1}{6} \frac{1}{2^3} (F'''(\xi_n) + F'''(\eta_n)) (y_{n+1} - y_n)^2 \right] \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \right).$$

Distribuyendo el producto:

$$\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}\right)^2 = -\frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{h_n} + \frac{1}{6} \frac{1}{2^3} (F'''(\xi_n) + F'''(\eta_n)) \frac{(y_{n+1} - y_n)^3}{h_n}.$$

Paso 5: Multiplicar y dividir el residuo por h_n^2 y reordenar.

Reescribimos el término cúbico para que aparezca la derivada discreta al cubo y un factor h_n^2 :

$$\frac{(y_{n+1} - y_n)^3}{h_n} = h_n^2 \frac{(y_{n+1} - y_n)^3}{h_n^3} = h_n^2 \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}\right)^3.$$

Pasando $-\frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{h_n}$ al miembro izquierdo:

$$\frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{h_n} + \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}\right)^2 = h_n^2 \frac{1}{6} \frac{1}{2^3} (F'''(\xi_n) + F'''(\eta_n)) \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}\right)^3.$$

¡La demostración concluye con total exactitud y rigor!



TEOREMA 10 (EXAMEN OCTUBRE 2025)

Esquema de la Secante para Sistemas Gradiente: Preservación Exacta

Para $y' = -F'(y)$ con $F \in C^2(\mathbb{R})$, definimos la función secante incremental:

$$F_p(y, z) = \begin{cases} \frac{F(y) - F(z)}{y - z}, & \text{si } y \neq z \\ F'(z), & \text{si } y = z \end{cases}$$

El **esquema de la secante** es:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = -F_p(y_{n+1}, y_n) = -\frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{y_{n+1} - y_n}.$$

Multiplicando ambos lados por $\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}$:

$$\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}\right)^2 = -\frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{h_n} \implies \frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{h_n} + \left|\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}\right|^2 = 0.$$

¡El esquema de la secante satisface la ley de energía discreta con **residuo exactamente cero** (sin ningún error de truncatura en la energía)!

1.11 Problemas Conservativos y Sistemas Positivos

SISTEMAS CONSERVATIVOS (HAMILTONIANOS PLANOS)

Sistemas Planos $u' = F'(v)$, $v' = -G'(u)$

Consideremos el sistema plano:

$$\begin{cases} u'(t) = F'(v(t)) \\ v'(t) = -G'(u(t)) \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por $G'(u)$ y la segunda por $F'(v)$ y sumando:

$$u'G'(u) + v'F'(v) = 0 \implies \frac{d}{dt} [G(u(t)) + F(v(t))] = 0.$$

La energía total $E(u, v) = G(u) + F(v)$ se conserva exactamente en el tiempo continuo.

Ejemplo clásico (Péndulo): $u' = v$, $v' = -\sin u \implies F(v) = \frac{1}{2}v^2$ (energía cinética), $G(u) = -\cos u$ (energía potencial).

- **El Esquema de la Secante:**

$$\delta u_{n+1} = \frac{F'(v_{n+1}) - F'(v_n)}{v_{n+1} - v_n}, \quad \delta v_{n+1} = -\frac{G(u_{n+1}) - G(u_n)}{u_{n+1} - u_n}.$$

Multiplicando la primera por $(v_{n+1} - v_n)$ y la segunda por $(u_{n+1} - u_n)$ y restando:

$$\delta(F(v_{n+1}) + G(u_{n+1})) = 0.$$

¡Conserva exactamente la curva de nivel de la energía hamiltoniana para cualquier paso h_n !

- **Euler Implícito:** Si F y G son convexas, disipa energía numéricamente: las trayectorias espiralan hacia el origen.
- **Euler Explícito:** Introduce ganancia artificial de energía: las órbitas divergen rápidamente hacia el infinito.

Preservación Incondicional de Positividad sin Newton

Consideremos el sistema positivo $y' = -y \cdot * f(y) + g(y)$ con $f(y), g(y) \geq 0$ para todo $y \geq 0$ (típico en modelos epidemiológicos SIR/SIS y dinámica de poblaciones Lotka-Volterra). Si el dato inicial es positivo $y_0 > 0$, la solución continua permanece estrictamente positiva $\varphi(t) > 0$ para todo $t > 0$.

Esquema Lineal Desacoplado Implícito-Explícito:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = -y_{n+1} \cdot * f(y_n) + g(y_n).$$

Despejando componente a componente $i = 1, \dots, M$:

$$y_{n+1}^i (1 + h_n f_i(y_n)) = y_n^i + h_n g_i(y_n) \implies y_{n+1}^i = \frac{y_n^i + h_n g_i(y_n)}{1 + h_n f_i(y_n)}.$$

Como $y_n > 0, h_n > 0, g(y_n) \geq 0$ y $f(y_n) \geq 0$:

$$y_{n+1}^i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad \forall h_n > 0.$$

¡Este esquema preserva incondicionalmente la positividad física del problema, es desacoplado y **no requiere resolver ningún sistema no lineal ni aplicar Newton!**

2. Problemas de Contorno (PCo) para EDOs Lineales de 2º Orden

2.1 El Problema Continuo y Método de Tiro (Shooting Method)

Consideramos el Problema de Contorno de Dirichlet para una EDO lineal de segundo orden en el intervalo acotado $[a, b]$:

$$\begin{cases} (Ly)(x) := -y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases} \quad (9)$$

donde los datos satisfacen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $p, q, f \in C([a, b])$. Buscamos soluciones clásicas $\varphi \in C^2(a, b) \cap C([a, b])$.

TEOREMA 11 (TEOREMA DE LA ALTERNATIVA DE FREDHOLM)

Alternativa de Existencia y Unicidad

Para el problema de contorno (9) se cumple exactamente una de las siguientes dos alternativas:

1. Existe una **única solución** φ de (9) para cualesquiera datos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f \in C([a, b])$.
2. El **problema homogéneo asociado**:

$$\begin{cases} (L\psi)(x) = 0, & x \in [a, b] \\ \psi(a) = 0, & \psi(b) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

admite al menos una solución no trivial $\psi \not\equiv 0$.

Consecuencia: La unicidad de la solución homogénea (que la única solución sea $\psi \equiv 0$) es condición necesaria y suficiente para la existencia y unicidad del problema no homogéneo con cualquier dato de contorno.

DEMOSTRACIÓN CONSTRUCTIVA VIA MÉTODO DE TIRO (SHOOTING METHOD)

El método de tiro transforma el problema de contorno (con datos en los dos extremos) en una combinación lineal de dos Problemas de Valor Inicial (PVI) que se disparan desde el extremo izquierdo $x = a$:

- **PVI 1 (No homogéneo):** $\begin{cases} L\varphi_1 = f \\ \varphi_1(a) = \alpha, \varphi_1'(a) = 0 \end{cases} \implies$ solución $\varphi_1(x)$ bien definida y única en $[a, b]$.
- **PVI 2 (Homogéneo):** $\begin{cases} L\varphi_2 = 0 \\ \varphi_2(a) = 0, \varphi_2'(a) = 1 \end{cases} \implies$ solución $\varphi_2(x)$ bien definida y única en $[a, b]$.

Por la linealidad del operador diferencial L , para cualquier constante $s \in \mathbb{R}$, la combinación:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + s\varphi_2(x)$$

satisface automáticamente la ecuación diferencial y la condición en el extremo izquierdo:

$$\begin{aligned} L\varphi &= L\varphi_1 + sL\varphi_2 = f + s \cdot 0 = f, \\ \varphi(a) &= \varphi_1(a) + s\varphi_2(a) = \alpha + s \cdot 0 = \alpha. \end{aligned}$$

Para satisfacer la condición de contorno en el extremo derecho $x = b$, imponemos:

$$\varphi(b) = \varphi_1(b) + s\varphi_2(b) = \beta \implies s\varphi_2(b) = \beta - \varphi_1(b). \quad (11)$$

Discusión de la Alternativa:

- **Caso 1:** $\varphi_2(b) \neq 0$. Podemos despejar unívocamente la pendiente de disparo:

$$s = \frac{\beta - \varphi_1(b)}{\varphi_2(b)}.$$

La función $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \frac{\beta - \varphi_1(b)}{\varphi_2(b)}\varphi_2(x)$ es la **única solución** del problema de contorno.

- **Caso 2:** $\varphi_2(b) = 0$. La función φ_2 satisface $\varphi_2(a) = 0$ y $\varphi_2(b) = 0$ con $L\varphi_2 = 0$. Como $\varphi_2'(a) = 1 \neq 0$, la función φ_2 es una **solución no trivial** del problema homogéneo (10).

Inestabilidad Numérica del Método de Tiro: En la práctica, calcular s puede ser extremadamente inestable si $\varphi_2(b) \approx 0$ (división por casi cero) o si el operador L tiene autovalores positivos grandes, lo que hace que los errores de integración crezcan exponencialmente como $e^{\lambda(b-a)}$. Por ello se prefieren esquemas de diferencias finitas globales. ■

2.2 Principio del Máximo Continuo y Unicidad

TEOREMA 12 (PRINCIPIO DEL MÁXIMO CONTINUO)

Propiedad de Extremo para $q(x) \geq 0$

Supongamos que el coeficiente de orden cero es no negativo: $q(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces:

1. Si $(L\varphi)(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces:

$$\max_{x \in [a, b]} \varphi(x) \leq \max\{\varphi(a), \varphi(b), 0\}.$$

2. Si $(L\varphi)(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces:

$$\min_{x \in [a, b]} \varphi(x) \geq \min\{\varphi(a), \varphi(b), 0\}.$$

DEMOSTRACIÓN COMPLETA EN DOS PASOS (¡PREGUNTA CLAVE DE EXAMEN!)

Paso 1: Desigualdad estricta $(L\varphi)(x) < 0$.

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que el máximo se alcanza en un punto interior $x_* \in (a, b)$ y que dicho valor máximo es estrictamente positivo, es decir, $\varphi(x_*) = \max_{[a,b]} \varphi > \max\{\varphi(a), \varphi(b), 0\} \geq 0$.

Por las condiciones necesarias de extremo local de una función de clase C^2 :

$$\varphi'(x_*) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi''(x_*) \leq 0.$$

Evaluamos el operador diferencial en el punto x_* :

$$(L\varphi)(x_*) = -\varphi''(x_*) + p(x_*)\varphi'(x_*) + q(x_*)\varphi(x_*).$$

Analizamos el signo de cada término:

- $-\varphi''(x_*) \geq 0$ (puesto que $\varphi''(x_*) \leq 0$).
- $p(x_*)\varphi'(x_*) = p(x_*) \cdot 0 = 0$.
- $q(x_*)\varphi(x_*) \geq 0$ (puesto que $q(x_*) \geq 0$ por hipótesis y $\varphi(x_*) > 0$ por hipótesis de absurdo).

Sumando los tres términos no negativos:

$$(L\varphi)(x_*) \geq 0.$$

¡Esto contradice directamente la hipótesis $(L\varphi)(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$! Por tanto, si $L\varphi < 0$, el máximo no puede ser positivo en el interior.

Paso 2: Caso general $(L\varphi)(x) \leq 0$ mediante perturbación exponencial.

Para extender el resultado cuando $L\varphi \leq 0$, introducimos la función perturbada:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) + \varepsilon \exp(Mx), \quad \varepsilon > 0,$$

donde $M > 0$ es una constante a determinar. Calculamos la acción del operador sobre la perturbación:

$$L(\exp(Mx)) = -\frac{d^2}{dx^2}(e^{Mx}) + p(x)\frac{d}{dx}(e^{Mx}) + q(x)e^{Mx} = e^{Mx} [-M^2 + Mp(x) + q(x)].$$

Por tanto:

$$L(\varphi_\varepsilon)(x) = (L\varphi)(x) + \varepsilon e^{Mx} [-M^2 + Mp(x) + q(x)].$$

Como p y q son continuas en el intervalo compacto $[a, b]$, están acotadas: $\|p\|_\infty < +\infty$ y $\|q\|_\infty < +\infty$. Elegimos M suficientemente grande de modo que:

$$-M^2 + M\|p\|_\infty + \|q\|_\infty < 0.$$

Dado que $L\varphi \leq 0$ y $\varepsilon e^{Mx} > 0$, deducimos que:

$$L(\varphi_\varepsilon)(x) < 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Por el **Paso 1**, φ_ε satisface la cota:

$$\max_{[a,b]} \varphi_\varepsilon \leq \max\{\varphi_\varepsilon(a), \varphi_\varepsilon(b), 0\}.$$

Como $\varphi(x) \leq \varphi_\varepsilon(x)$ para todo $x \in [a, b]$:

$$\max_{[a,b]} \varphi \leq \max_{[a,b]} \varphi_\varepsilon \leq \max\{\varphi_\varepsilon(a), \varphi_\varepsilon(b), 0\}.$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ en ambos miembros, como $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \varphi(x)$ uniformemente:

$$\max_{[a,b]} \varphi \leq \max\{\varphi(a), \varphi(b), 0\}.$$

La demostración queda completamente establecida. ■

COROLARIO (UNICIDAD PARA $Q(X) \geq 0$)

Existencia y Unicidad Global del PCo

Si $q(x) \geq 0$ en $[a, b]$, el problema de contorno (9) admite una **única solución** para cualesquiera datos α, β, f .

Demostración: Sea ψ una solución del problema homogéneo ($L\psi = 0$ en (a, b) , $\psi(a) = \psi(b) = 0$). Como $L\psi = 0 \leq 0$, por el Principio del Máximo: $\max \psi \leq \max\{0, 0, 0\} = 0$. Como $L(-\psi) = 0 \leq 0$, por el mismo principio: $\max(-\psi) = -\min \psi \leq 0 \implies \min \psi \geq 0$. En consecuencia, $0 \leq \min \psi \leq \max \psi \leq 0$, lo que exige que $\psi(x) \equiv 0$. Por el Teorema de la Alternativa (Teorema 11), existe una única solución. ■

2.3 Esquema de Diferencias Finitas Centradas de 3 Puntos

Discretizamos el intervalo $[a, b]$ mediante una partición uniforme de N subintervalos de longitud constante:

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_n = a + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Aproximamos la segunda derivada y la primera derivada en los nodos interiores x_n mediante fórmulas centradas:

LEMA 5

Fórmulas de Derivación Numérica Centrada y Restos de Taylor

1. Segunda Derivada Centrada:

$$y''(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_n), \quad \xi_n \in (x_{n-1}, x_{n+1}).$$

2. Primera Derivada Centrada:

$$y'(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\eta_n), \quad \eta_n \in (x_{n-1}, x_{n+1}).$$

Sustituyendo estas aproximaciones en $(Ly)(x_n) = f(x_n)$ y multiplicando toda la ecuación por h^2 :

$$-(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})) + p_n \frac{h}{2} (y_{n+1} - y_{n-1}) + q_n h^2 y_n = h^2 f_n.$$

Agrupando coeficientes para los tres nodos adyacentes y_{n-1}, y_n, y_{n+1} :

$$l_{n-1} y_{n-1} + c_n y_n + r_n y_{n+1} = h^2 f_n, \quad n = 1, \dots, N-1$$

$$\begin{cases} l_{n-1} = -1 - p(x_n) \frac{h}{2} & \text{(subdiagonal)} \\ c_n = 2 + q(x_n) h^2 & \text{(diagonal principal)} \\ r_n = -1 + p(x_n) \frac{h}{2} & \text{(superdiagonal)} \end{cases} \quad (12)$$

Estructura Matricial Tridiagonal $AY = b$

El esquema se escribe como un sistema lineal de $(N-1) \times (N-1)$ ecuaciones con incógnitas $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})^T$:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & r_1 & 0 & \dots & 0 \\ l_1 & c_2 & r_2 & \dots & 0 \\ 0 & l_2 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & l_{N-2} & c_{N-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} h^2 f_1 - l_0 \alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} - r_{N-1} \beta \end{pmatrix}.$$

Notemos que en los extremos intervienen las condiciones de contorno Dirichlet:

$$b_1 = h^2 f_1 + \left(1 + p_1 \frac{h}{2}\right) \alpha, \quad b_{N-1} = h^2 f_{N-1} + \left(1 - p_{N-1} \frac{h}{2}\right) \beta.$$

Coste computacional: Al ser tridiagonal, se resuelve en sólo $O(5N)$ operaciones con el algoritmo de Thomas, frente a $O(N^3/3)$ de la eliminación gaussiana clásica.

2.4 Principio del Máximo Discreto

TEOREMA 13 (PRINCIPIO DEL MÁXIMO DISCRETO)

Cota Discreta de Extremos bajo Condición de Malla

Supongamos que $q(x) \geq 0$ en $[a, b]$ y que el tamaño de malla satisface la **condición de pequeñez**:

$$\frac{h \|p\|_\infty}{2} < 1.$$

Si el vector discreto $(y_n)_{n=0}^N$ satisface $L_h(y_n) \leq 0$ para todo $n = 1, \dots, N-1$, entonces:

$$\max_{0 \leq n \leq N} y_n \leq \max\{y_0, y_N, 0\}.$$

Análogamente, si $L_h(y_n) \geq 0$, entonces $\min_{0 \leq n \leq N} y_n \geq \min\{y_0, y_N, 0\}$.

DEMOSTRACIÓN COMPLETA VIA COMBINACIÓN CONVEXA

Paso 1: Expresión de y_n en función de sus vecinos.

La hipótesis $L_h(y_n) \leq 0$ significa:

$$\left(\frac{2}{h^2} + q_n\right) y_n \leq \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_n}{2h}\right) y_{n-1} + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_n}{2h}\right) y_{n+1}.$$

Multiplicando por h^2 :

$$(2 + q_n h^2) y_n \leq \left(1 + p_n \frac{h}{2}\right) y_{n-1} + \left(1 - p_n \frac{h}{2}\right) y_{n+1}.$$

Bajo la condición de malla $\frac{h\|p\|_\infty}{2} < 1$, los dos coeficientes de los vecinos son **estrictamente positivos**:

$$\alpha_n := 1 + p_n \frac{h}{2} > 0, \quad \beta_n := 1 - p_n \frac{h}{2} > 0.$$

Su suma es: $\alpha_n + \beta_n = (1 + p_n \frac{h}{2}) + (1 - p_n \frac{h}{2}) = 2$.

Paso 2: Razonamiento sobre el máximo interior.

Supongamos por reducción al absurdo que el máximo se alcanza en un nodo interior $m \in \{1, \dots, N-1\}$ con $y_m > \max\{y_0, y_N, 0\} \geq 0$. En particular, $y_m > 0$ y $y_m \geq y_{m-1}, y_m \geq y_{m+1}$. Como $q_m \geq 0$ y $y_m > 0$:

$$2y_m \leq (2 + q_m h^2) y_m \leq \alpha_m y_{m-1} + \beta_m y_{m+1}.$$

Dividiendo por 2:

$$y_m \leq \frac{\alpha_m}{2} y_{m-1} + \frac{\beta_m}{2} y_{m+1}.$$

Notemos que $\frac{\alpha_m}{2} > 0$, $\frac{\beta_m}{2} > 0$ y $\frac{\alpha_m}{2} + \frac{\beta_m}{2} = 1$. ¡Esto significa que y_m está acotado por una **combinación lineal convexa estricta** de sus dos vecinos! Una combinación convexa estricta satisface:

$$y_m \leq \max\{y_{m-1}, y_{m+1}\}.$$

Para que esto no sea una contradicción con ser y_m el máximo, debe ocurrir la igualdad $y_m = y_{m-1} = y_{m+1}$. Propagando esta igualdad nodo a nodo hacia la izquierda y derecha, se deduce que todos los nodos deben ser iguales, alcanzando el valor en los extremos y_0 o y_N . Contradicción. Por tanto, el máximo no puede ser positivo en el interior. ■

BUENA COLOCACIÓN, CONSISTENCIA Y CONVERGENCIA $O(H^2)$

Propiedades Asintóticas del Esquema Centrado

- **Buena Colocación (Invertibilidad de A):** Si $q \geq 0$ y $\frac{h\|p\|_\infty}{2} < 1$, la matriz A es de **diagonal estrictamente dominante**:

$$|c_n| = 2 + q_n h^2 \geq 2 > |l_{n-1}| + |r_n| = \left|1 + p_n \frac{h}{2}\right| + \left|1 - p_n \frac{h}{2}\right| = 2.$$

Por el Teorema de Gershgorin, A es invertible y existe una única solución discreta $(y_n)_{n=0}^N$.

- **Consistencia de Orden 2:** Por el Lema 5, el error de consistencia es $\|E(h)\|_\infty \leq Kh^2$.
- **Convergencia de Orden 2:** Si $q(x) \geq q_{\min} > 0$, usando funciones barrera y el Principio del Máximo Discreto:

$$\|e(h)\|_\infty = \max_{0 \leq n \leq N} |\varphi(x_n) - y_n| \leq \frac{K}{q_{\min}} h^2.$$

2.5 Extensiones Críticas de Examen

EXTENSIÓN 1 (¡PREGUNTA TÍPICA! – ENERO 2025)

Formulación Autoadjunta: Eliminación de la Restricción sobre h

Toda ecuación diferencial lineal $-y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ puede reescribirse en **forma autoadjunta** (o conservativa) multiplicando por el factor integrante:

$$r(x) = \exp\left(-\int_a^x p(s) ds\right) > 0.$$

La ecuación continua se convierte en:

$$-(r(x)y'(x))' + r(x)q(x)y(x) = r(x)f(x). \quad (13)$$

Discretizando el término divergente en semipuntos $x_{n+1/2} = x_n + h/2$:

$$-\frac{r_{n+1/2}(y_{n+1} - y_n) - r_{n-1/2}(y_n - y_{n-1})}{h^2} + r_n q_n y_n = r_n f_n.$$

Agrupando términos:

$$-\frac{r_{n-1/2}}{h^2} y_{n-1} + \left(\frac{r_{n-1/2} + r_{n+1/2}}{h^2} + r_n q_n\right) y_n - \frac{r_{n+1/2}}{h^2} y_{n+1} = r_n f_n.$$

¡VENTAJA COLOSAL EN EL EXAMEN!

Como $r(x) = \exp(-\int p) > 0$ es estrictamente positivo en todo $[a, b]$, los coeficientes fuera de la diagonal son siempre estrictamente negativos:

$$l_{n-1} = -\frac{r_{n-1/2}}{h^2} < 0, \quad r_n = -\frac{r_{n+1/2}}{h^2} < 0, \quad \forall h > 0.$$

¡Por tanto, la matriz es simétrica y de diagonal estrictamente dominante para cualquier tamaño de paso h !

No es necesario imponer ninguna pequeñez sobre el paso h (desaparece la restricción $\frac{h\|p\|_\infty}{2} < 1$).

Condiciones de Contorno de Neumann / Robin ($y'(a) = \alpha$)

Cuando en un extremo no conocemos el valor de $y(a)$ sino el flujo o derivada $y'(a) = \alpha$:

- **Aproximación No Centrada (Orden 1):**

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha \implies y_0 = y_1 - \alpha h.$$

Sustituyendo en la primera ecuación del esquema en $n = 1$, se obtiene un sistema lineal. *Inconveniente:* Reduce la precisión global del método a orden $O(h)$.

- **Aproximación Centrada con Nodo Fantasma (Orden 2 Global):** Añadimos un nodo ficticio exterior $x_{-1} = a - h$ y aproximamos la derivada de forma centrada:

$$\frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \alpha \implies y_{-1} = y_1 - 2h\alpha. \quad (14)$$

Evaluamos la ecuación diferencial en el extremo izquierdo $x_0 = a$:

$$-\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + p_0 \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + q_0 y_0 = f_0.$$

Sustituimos $y_{-1} = y_1 - 2h\alpha$ y la derivada centrada α :

$$-\frac{y_1 - 2y_0 + (y_1 - 2h\alpha)}{h^2} + p_0 \alpha + q_0 y_0 = f_0$$

$$-\frac{2y_1 - 2y_0 - 2h\alpha}{h^2} + p_0 \alpha + q_0 y_0 = f_0$$

$$\left(\frac{2}{h^2} + q_0\right) y_0 - \frac{2}{h^2} y_1 = f_0 - \alpha \left(p_0 + \frac{2}{h}\right).$$

Multiplicando por h^2 :

$$(2 + q_0 h^2) y_0 - 2y_1 = h^2 f_0 - \alpha(p_0 h^2 + 2h).$$

¡Esta ecuación proporciona la primera fila modificada del sistema matricial y preserva el **orden 2 de convergencia** en toda la malla!

3. Laboratorio Práctico MATLAB: Guía de 5/5 en Prácticas

REGLAS DE ORO PARA LA PRÁCTICA DE EXAMEN

Cómo Estructurar la Entrega para la Máxima Calificación

La parte práctica vale **5 puntos** y sigue una estructura fija de 3 o 4 apartados:

1. **Escribir una M-función:** Debe recibir `(f, l, y0, N, ...)` o `(f, fy, l, y0, N)` y devolver `[t, y]`. El vector `t` debe ser columna o fila coherente con la matriz de soluciones `y`.
2. **Escribir un script de Test:** Inicializa los parámetros, ejecuta la función, y genera gráficas con `figure`, `plot`, `legend`, `xlabel`, `ylabel`, `title` y `grid on`. Si es un sistema plano, se pide la órbita en el plano de fases marcando el punto inicial con un círculo o cruz.
3. **Cálculo Analítico del Orden de Convergencia (EOC):** Calcular el error respecto a la solución exacta o respecto a una solución de referencia fina (Runge-Kutta 4 con $N = 1000$ o $N = 10000$) y estimar el orden con la fórmula de dos mallas:

$$p \approx \frac{\log(E(h_1)/E(h_2))}{\log(h_1/h_2)}.$$

3.1 Plantilla: Método de Trapecios Implícito con Newton Vectorial

```
function [t, y] = TrapImpl(f, fy, I, y0, N)
% TRAPIMPL Resuelve  $y' = f(t,y)$  en  $I=[t_0, tf]$  con Trapecios Implícito y Newton
% y0 puede ser un vector columna de dimension M
t0 = I(1); tf = I(2);
h = (tf - t0) / (N - 1);
t = linspace(t0, tf, N)';
M = length(y0);
y = zeros(M, N);
y(:, 1) = y0(:);

% Parametros del metodo de Newton
Eps = 1e-8;
Nmax = 1000;

for n = 1:N-1
    tn = t(n);
    tn1 = t(n+1);
    yn = y(:, n);
    fn = f(tn, yn);

    % Estimacion inicial para Newton (predicador de Euler explicito)
    z = yn + h * fn;

    % Bucle de Newton para resolver  $F(z) = 0$ 
    for iter = 1:Nmax
        %  $F(z) = z - y_n - (h/2)*(f_n + f(t_{n1}, z))$ 
        F_val = z - yn - (h/2) * (fn + f(tn1, z));

        if norm(F_val, inf) < Eps
            break;
        end

        % Matriz Jacobiana:  $DF(z) = eye(M) - (h/2)*fy(tn1, z)$ 
        DF_val = eye(M) - (h/2) * fy(tn1, z);

        % Incremento de Newton: resolver sistema lineal  $DF * dz = -F$ 
        dz = - DF_val \ F_val;
        z = z + dz;
    end

    y(:, n+1) = z;
end
y = y'; % Devolver como matriz N x M
end
```

3.2 Plantilla: θ -Esquema Modificado

```
function [t, y] = ThetaMod(f, I, y0, N, theta)
% THETAMOD Implementa  $y_{n+1} = y_n + h*f(t_n + \theta*h, y_n + \theta*(y_{n+1} - y_n))$ 
t0 = I(1); tf = I(2);
h = (tf - t0) / (N - 1);
t = linspace(t0, tf, N)';
M = length(y0);
y = zeros(M, N);
y(:, 1) = y0(:);

Eps = 1e-8; Nmax = 1000;
for n = 1:N-1
    tn = t(n); yn = y(:, n);
    t_theta = tn + theta * h;

    % Si theta == 0 es explicito puro
    if theta == 0
        y(:, n+1) = yn + h * f(tn, yn);
        continue;
    end

    % Si theta > 0 aplicamos Newton para hallar yn+1
    z = yn; % guess inicial
    for iter = 1:Nmax
        arg_y = yn + theta * (z - yn);
        F_val = z - yn - h * f(t_theta, arg_y);
        if norm(F_val, inf) < Eps, break; end

        % Aproximacion numerica del Jacobiano o derivada
        % Si f es escalar: DF = 1 - h * theta * fy(t_theta, arg_y)
        % Mediante diferencias finitas complejas o perturbacion:
        DF_val = eye(M) - h * theta * approx_jacobian(f, t_theta, arg_y);
        z = z - DF_val \ F_val;
    end
    y(:, n+1) = z;
end
y = y';
end
```

3.3 Cálculo Analítico del Orden de Convergencia (EOC)

```
% SCRIPT: OrdenTrapImpl.m
I = [0, 7]; y0 = [2; 0.5];
Nmallas = 10;
N_valores = 10 * (1:Nmallas); % N = 10, 20, 30, ..., 100
errores = zeros(Nmallas, 1);
h_valores = zeros(Nmallas, 1);

% 1. Solucion de referencia con RK4 muy fina (N = 1000)
[t_ref, y_ref] = RK4(@f_presa, I, y0, 1000);

% 2. Bucle de mallas
for k = 1:Nmallas
    N = N_valores(k);
    [t_k, y_k] = TrapImpl(@f_presa, @fy_presa, I, y0, N);

    % Interpoliar solucion de referencia a los nodos t_k
    y_ref_interp = interp1(t_ref, y_ref, t_k);

    % Error en norma infinito (o norma 2)
    errores(k) = max(vecnorm((y_k - y_ref_interp)', 2));
    h_valores(k) = (I(2) - I(1)) / (N - 1);
end

% 3. Calcular orden entre mallas consecutivas
ordenes = log(errores(1:end-1) ./ errores(2:end)) ./ log(h_valores(1:end-1) ./ h_valores(2:end));

fprintf('\n--- TABLA DE CONVERGENCIA NUMERICA ---\n');
fprintf(' N      Paso h      Error L_inf      Orden Estimado\n');
fprintf('%4d  %12.5e  %14.6e      ----\n', N_valores(1), h_valores(1), errores(1));
for k = 1:Nmallas-1
    fprintf('%4d  %12.5e  %14.6e  %12.4f\n', N_valores(k+1), h_valores(k+1), errores(k+1), ordenes(k));
end
```

3.4 Ensamblado Matricial de Problemas de Contorno (PCo)

```
function [x, y] = DifFtaPCo(q_fun, f_fun, I, alpha, beta, N)
% Resuelve  $-y'' + q(x)y = f(x)$ ,  $y(a)=\alpha$ ,  $y(b)=\beta$  con N subintervalos
a = I(1); b = I(2);
h = (b - a) / N;
x = linspace(a, b, N+1)';

% Nodos interiores x(2) ... x(N)
x_int = x(2:N);
q_vals = q_fun(x_int);
f_vals = f_fun(x_int);

% Diagonales de la matriz tridiagonal A:
% c = 2 + q(x_n)*h^2, l = -1, r = -1
M = N - 1;
diag_c = 2 + q_vals * (h^2);
diag_l = -1 * ones(M, 1);
diag_r = -1 * ones(M, 1);

% Montaje eficiente con spdiags
A = spdiags([diag_l, diag_c, diag_r], [-1, 0, 1], M, M);

% Vector de terminos independientes b
rhs = (h^2) * f_vals;
rhs(1) = rhs(1) + alpha; % Condicion de Dirichlet en x=a
rhs(end) = rhs(end) + beta; % Condicion de Dirichlet en x=b

% Resolucion directa del sistema tridiagonal (O(N))
y_int = A \ rhs;

% Vector solucion completo incluyendo condiciones de contorno
y = [alpha; y_int; beta];
end
```


4. Exámenes Oficiales Resueltos Paso a Paso

EXAMEN OFICIAL • 22 DE ENERO DE 2026

Primera Convocatoria (P1) — Curso 2025/26 (Teoría 5 puntos)

Problema: Consideramos el problema de Cauchy para una EDO autónoma de tipo gradiente:

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = -F'(y), & t \in [t_0, t_f] \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $F \in C^3(\mathbb{R})$. Solución exacta $\phi \in C^3[t_0, t_f]$. Esquema del punto medio implícito:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = -F' \left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2} \right).$$

1. Existencia y unicidad local de y_{n+1} por el Teorema de la Función Implícita:

- Definimos $H(y, h) = y - y_n + hF' \left(\frac{y+y_n}{2} \right)$. Como $F \in C^3(\mathbb{R})$, H es de clase $C^1(\mathbb{R} \times [0, h_{\max}])$.
- Evaluamos en $h = 0$: $H(y_n, 0) = y_n - y_n + 0 = 0$.
- Derivamos respecto a y : $\partial_y H(y, h) = 1 + \frac{h}{2} F'' \left(\frac{y+y_n}{2} \right) \implies \partial_y H(y_n, 0) = 1 \neq 0$.
- Por el TFI, existen entornos V de 0 y U de y_n y una única función $g : V \rightarrow U$ tal que $H(g(h), h) = 0$. Por tanto, para h_n pequeño existe un único $y_{n+1} = g(h_n)$ cerca de y_n .

2. Método de Newton y condición de convergencia:

- Para resolver $H(y) = y - y_n + h_n F' \left(\frac{y+y_n}{2} \right) = 0$, la sucesión de Newton es:

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{H(y^{(k)})}{H'(y^{(k)})} = y^{(k)} - \frac{y^{(k)} - y_n + h_n F' \left(\frac{y^{(k)}+y_n}{2} \right)}{1 + \frac{h_n}{2} F'' \left(\frac{y^{(k)}+y_n}{2} \right)}.$$

- Condición suficiente de convergencia local: que la derivada $H'(y_{n+1}) \neq 0$. Basta imponer que:

$$\frac{h_n}{2} |F''(\bar{y})| < 1 \iff h_n < \frac{2}{\max |F''|}.$$

(Si además F es convexa, $F'' \geq 0$, entonces $H' \geq 1 > 0$ y Newton converge incondicionalmente para todo $h_n > 0$).

3. Ley de energía discreta: Demostrada con total detalle en la Sección 1.10 mediante el doble Taylor de orden 3 centrado en $\bar{y} = \frac{y_{n+1}+y_n}{2}$.

4. Error de consistencia de orden 2 ($|E_n| \leq K h_n^2$):

- $E_n(h_n) = \frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{h_n} + F' \left(\frac{\phi(t_{n+1}) + \phi(t_n)}{2} \right)$.
- Por Taylor centrado en $t_{n+1/2} = t_n + h_n/2$:

$$\frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{h_n} = \phi'(t_{n+1/2}) + \frac{h_n^2}{24} \phi'''(\xi_1) = -F'(\phi(t_{n+1/2})) + O(h_n^2).$$

$$\frac{\phi(t_{n+1}) + \phi(t_n)}{2} = \phi(t_{n+1/2}) + \frac{h_n^2}{8} \phi''(\xi_2) \implies F' \left(\frac{\phi(t_{n+1}) + \phi(t_n)}{2} \right) = F'(\phi(t_{n+1/2})) + O(h_n^2).$$

- Al sumar ambas expresiones, los términos principales se cancelan idénticamente:

$$E_n(h_n) = -F'(\phi(t_{n+1/2})) + F'(\phi(t_{n+1/2})) + O(h_n^2) = O(h_n^2).$$

Por tanto, $|E_n| \leq Kh_n^2$ con K dependiente de $\|\phi'''\|_\infty$ y $\|F''\|_\infty$. ■

EXAMEN OFICIAL • 23 DE ENERO DE 2025

Primera Convocatoria (P1) — Curso 2024/25

Cuestión 1: Problema de Cauchy autónomo $y' = f(y) + g(y)$, esquema implícito-explicito:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = f(y_{n+1}) + g(y_n).$$

- **TFI:** $F(y, h) = y - y_n - h[f(y) + g(y_n)] = 0$. En $h = 0$, $F(y_n, 0) = 0$ y $\partial_y F(y_n, 0) = 1 \neq 0$. Concluye por TFI.
- **Newton:** $y^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{y^{(k)} - y_n - h_n(f(y^{(k)}) + g(y_n))}{1 - h_n f'(y^{(k)})}$. Convergencia local asegurada si $h_n |f'(y_{n+1})| < 1$.
- **Consistencia orden 1:** $a_0 = [f(\phi) + g(\phi)] - [f(\phi) + g(\phi)] = 0 \implies$ orden al menos 1.
- **Ley de energía discreta (Convex Splitting):** Primitivas $F' = -f$ (convexa) y $G' = -g$ (cóncava). Por convexidad de F : $F(y_{n+1}) - F(y_n) \leq F'(y_{n+1})(y_{n+1} - y_n) = -f(y_{n+1})(y_{n+1} - y_n)$. Por concavidad de G : $G(y_{n+1}) - G(y_n) \leq G'(y_n)(y_{n+1} - y_n) = -g(y_n)(y_{n+1} - y_n)$. Sumando y dividiendo por h_n :

$$\frac{F(y_{n+1}) - F(y_n)}{h_n} + \frac{G(y_{n+1}) - G(y_n)}{h_n} \leq -(f(y_{n+1}) + g(y_n)) \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = -\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}\right)^2.$$

Pasando al primer miembro queda probada la desigualdad ≤ 0 .

Cuestión 2: Problema de contorno autoadjunto $-y'' + q(x)y = f(x)$, $q \geq 0$. Si $f \leq 0$, probar el principio del máximo discreto $\max_n y_n \leq \max\{y_a, y_b, 0\}$. Resuelto rigurosamente en la Sección 2.4 como combinación lineal convexa de los vecinos.

5. Chuleta Resumen de Fórmulas y Comandos de Examen

10 Mandamientos Matemáticos para Aprobar el P1

1. **TFI en 3 Pasos:** Definir $F(y, h) = 0$, verificar $F(y_n, 0) = 0$, calcular $\partial_y F(y_n, 0) = \text{Id}$ (regular) y concluir entorno y función $g(h)$.
2. **Newton Local:** Requiere que el Jacobiano $F'(y_{n+1})$ sea invertible. Condición suficiente: $h\rho(f_y) < 1$. Si $f_y \leq 0$, ¡convergencia incondicional para todo $h > 0$!
3. **Taylor de Consistencia:** $a_0 = f - \Phi(\cdot, 0) = 0$ (orden ≥ 1); $a_1 = \frac{1}{2}f^1 - \partial_h \Phi(\cdot, 0) = 0$ (orden ≥ 2), donde $f^1 = f_t + f_y f$.
4. **Lema 4 de Productos Discretos:** $(y_{n+1} - y_n, y_{n+1})$ añade $+\frac{1}{2}|y_{n+1} - y_n|^2$ (disipa); $(y_{n+1} - y_n, y_n)$ añade $-\frac{1}{2}|y_{n+1} - y_n|^2$ (inestabilidad); en el punto medio se anula exactamente.
5. **Convex Splitting:** Si F_c es convexa $\implies F_c(y_{n+1}) - F_c(y_n) \leq (\nabla F_c(y_{n+1}), y_{n+1} - y_n)$. Si F_e es cóncava $\implies F_e(y_{n+1}) - F_e(y_n) \leq (\nabla F_e(y_n), y_{n+1} - y_n)$. Sumar y sustituir el esquema.
6. **Punto Medio en Gradiente:** Doble Taylor en $\bar{y} = (y_{n+1} + y_n)/2$. Al restar se cancelan los términos pares de orden 0 y 2. Despejar $F'(\bar{y})$ y multiplicar por δy_{n+1} .
7. **Secante:** Multiplicar directamente por δy_{n+1} . El término residual es exactamente 0.
8. **PCo Centrado:** $l_{n-1} = -1 - p_n h/2$, $c_n = 2 + q_n h^2$, $r_n = -1 + p_n h/2$. Coste $O(5N)$ con Thomas.
9. **Principio del Máximo Discreto:** Requiere $q(x) \geq 0$ y $h\|p\|_\infty/2 < 1$. Se demuestra despejando y_n como combinación convexa de y_{n-1} e y_{n+1} .
10. **Formulación Autoadjunta:** Multiplicar por $r(x) = \exp(-\int p)$. Elimina por completo la restricción sobre h porque los coeficientes fuera de la diagonal son siempre $-r_{n\pm 1/2}/h^2 < 0$.